2023 年度　ゼミ　演習問題(2)

脇　雄一郎（青山学院大学）

1　消費・貯蓄モデルの拡張(1)：将来所得の存在

演習問題 (1) では，将来の所得がない消費・貯蓄モデルを考えた．そこでは 2 本の予算制約式をまとめることにより，

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r_2} \leq y_1,$$

であることを示し，対数効用関数 $\ln c_1 + \beta \ln c_2$ のもとでオイラー方程式

$$1 = \beta \frac{c_1}{c_2}(1+r_2)$$

が成立することを確認した．

1. このとき，最適な消費が

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta} y_1,$$
$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}(1+r_2) y_1,$$

　となることを示せ．

ここで，$t = 2$ における予算制約が

$$c_2 \leq (1+r_2)s + y_2$$

で与えられるとしよう. ただし $y_2 > 0$ は外生変数で, $t = 2$ における実質所得を表す.

2. このとき, 最適な消費は前問の答えからどのように変化するか述べよ.

2　消費・貯蓄モデルの拡張(2)：多数の消費者

家計が複数存在する状況を考える. 各家計に $n = 1, ..., N$ というインデックスをつけることにしよう. 以下では, 家計 n の消費を $(c_1(n), c_2(n))$ として, 総消費

$$C_1 = \sum_{n=1}^{N} c_1(n)$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{N} c_2(n)$$

について考える.（総所得 Y_1 および Y_2 についても同様に定義する.）

1. 全ての家計は, 共通の対数効用関数 $\ln c_1 + \beta \ln c_2$ を持ち, 現在と将来において共通の所得, y_1 と y_2 を受け取るとしよう. このとき, 総消費 (C_1, C_2) と総所得 (Y_1, Y_2) はどのような関係にあるか示せ.
2. 全ての家計は, 共通の対数効用関数 $\ln c_1 + \beta \ln c_2$ を持つが, 現在と将来においては所得 $(y_1(n), y_2(n))$（共通とは限らない）を受け取るとしよう. このとき, 総消費 (C_1, C_2) と総所得 (Y_1, Y_2) はどのような関係にあるか示せ.
3. 全ての家計は, 現在と将来において共通の所得 y_1 と y_2 を受け取るが, 対数効用関数 $\ln c_1 + \beta(n) \ln c_2$（つまり割引因子は共通とは限らない）を持つとしよう. このとき, 総消費 (C_1, C_2) と総所得 (Y_1, Y_2) はどのような関係にあるか示せ.

上 3 つの設定においては, 総消費 (C_1, C_2) と総所得 (Y_1, Y_2) の間の簡単な関係を導出することができた. これは**集計**の一例である. このように集計が可能な場合, 多数の家計を考えずとも, **代表的家計**を考えれば, 総消費や総所得のような集計量同士の関係を導出することができる.

4. 割引因子と所得の両方が家計間で共通でないとき，総消費 (C_1, C_2) と総所得 (Y_1, Y_2) は前 3 問のような関係にあるだろうか？

3　異時点間の代替の弾力性

異時点間の代替の弾力性（elasticity of intertemporal substitution, EIS）とは，

$$EIS = \frac{d \ln(c_2/c_1)}{d \ln(1+r_2)}$$

で計算され，実質金利 1p.p. の変化に対して消費成長率が何 p.p. 変化するかを表す．

1. 対数効用関数 $\ln c_1 + \beta \ln c_2$ のもとでは，異時点間の代替の弾力性は 1 になる．このことを示せ．（ヒント：オイラー方程式に基づいて考えよ．）
2. べき乗効用関数
$$\frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$
（ただし $\sigma > 0$）のもとでオイラー方程式を導出せよ．
3. べき乗効用関数のもとでは，異時点間の代替の弾力性は幾つになるか． σ を用いて表せ．
4. オイラー方程式が成立するという仮説のもとで， σ を推定するにはどのようにすればいいだろうか．

4　モデルとその均衡(1)：endowment economy

大問 2 の設定で，全ての家計は，共通の対数効用関数 $\ln c_1 + \beta \ln c_2$ を持つが，現在と将来においては所得 $(y_1(n), y_2(n))$（共通とは限らない）を受け取るとしよう．

ここでは，いわゆる endowment economy を考える．家計 n は実質所得 $(y_1(n), y_2(n))$ を消費財の形で（外生的に）受け取り，消費財は保存することができないとする．

1. 次の二つの式の意味を需給均衡という観点から説明せよ. $C_1 = Y_1$, $C_2 = Y_2$.

この経済で, 家計が $s(n)$ だけ貯蓄をするということは, 現在(時点 $t = 1$)における消費財を $s(n)$ 単位だけ他の家計に渡し, それと引き換えに将来 (時点 $t = 2$) における消費財を $(1 + r_2)s(n)$ 単位受け取る, という(モノの)貸し借り行為である. つまり, $s(n) > 0$ の家計は貸し出しを, $s(n) < 0$ の家計は借り入れをしている.

2. 貯蓄の合計, $S = \sum_{n=1}^{N} s(n)$, が, $S = 0$ を満たすことを需給均衡という観点から説明せよ.

この経済の競争均衡は, 以下のように定義される.

Definition 1 (競争均衡)　競争均衡は, 以下の条件を満たすような価格 r_2^* と数量 $(c_1^*(n), c_2^*(n), s^*(n))_{n=1}^{N}$ の組である:

(1)　(個々の主体の最適化): 価格 r_2^* が与えられたもとで, 各家計 n にとって $(c_1^*(n), c_2^*(n), s^*(n))$ が最適な選択である(効用最大化問題を解く).

(2)　(需給の一致): $\sum_{n=1}^{N} c_1^*(n) = Y_1$, $\sum_{n=1}^{N} c_2^*(n) = Y_2$, $\sum_{n=1}^{N} s^*(n) = 0$ が成立する.

実は, 条件(1)のもとでは, 条件(2)の 3 つの式のうち 1 つは redundant である.

3. このことを示せ. (ヒント: n 人の予算制約式を足し合わせてみよう.)

この問題のモデルでは, 競争均衡において以下の性質が成り立つ.

- 各家計の消費成長率は均等化する. つまり, $c_2(n)/c_1(n)$, が同じ値をとる.
- 各家計の消費成長率は総所得の成長率と一致する. つまり, $c_2(n)/c_1(n) = Y_2/Y_1$ が成立する.
- 均衡の実質利子率は, Y_2/Y_1 によって決まる.

4. 上の 3 つの性質を示せ.