

# 2023年度 ゼミ 演習問題(1)

脇 雄一郎 (青山学院大学)

## 1 2財モデル

財1と財2という二つの財に対する, 消費者の需要関数を導出しよう. それぞれの消費量を  $c_1, c_2$  と書く. 消費者の効用関数を

$$U(c_1, c_2) = c_1^\alpha c_2^{1-\alpha}$$

(ただし  $0 < \alpha < 1$ ) とする. 予算制約は

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 \leq I$$

で与えられる. 価格  $p_1 > 0, p_2 > 0$  と, 所得  $I > 0$  は(消費者にとって)外生変数とする. 以下の問いに答えよ.

1. 予算制約は不等式で与えられているが, 強い不等号  $<$  が成立する可能性について考える必要はない. なぜか?

(マーシャルの)需要関数  $x_1(p_1, p_2, I), x_2(p_1, p_2, I)$  は, 各  $(p_1, p_2, I)$  に対して, それぞれの財の最適な消費量を定めるものである.

2. 予算制約を効用関数に代入して最大化することで, 需要関数を求めよ.
3. ラグランジュの未定乗数法を用いて需要関数を求めよ.

## 2 需要関数の性質

需要関数は, いわゆる0次同次性を満たす. つまり,  $i = 1, 2$  について, どのような定数  $a > 0$  に対しても,

$$x_i(p_1, p_2, I) = x_i(a \times p_1, a \times p_2, a \times I)$$

が成立する.

1. 問 1-2 の答えが 0 次同次性を満たすことを確認し, その理由について考察せよ.
2. 0 次同次性を踏まえれば, 財 1 をニューメーラールとして扱って(つまり, 財 1 の価格を 1 に基準化し, あらゆるものの価値を財 1 の量を尺度にして表して)も構わないことになる. このことを説明せよ. (ヒント:  $p'_2 = p_2/p_1$  を「財 1 (の量) で測った財 2 の価格」,  $I' = I/p_1$  を「財 1 (の量) で測った所得」と考えれば,

$$x_i(p_1, p_2, I) = x_i(1, p'_2, I')$$

が成立する.)

### 3 効用関数の単調変換

消費者の効用関数を

$$\tilde{U}(c_1, c_2) = \alpha \ln c_1 + (1 - \alpha) \ln c_2$$

とする. ただし  $0 < \alpha < 1$  であり,  $\ln$  は自然対数(底がネイピア数  $e$  の対数)を表す.

ここでは, 効用関数として問 1 の  $U$  を用いようが  $\tilde{U}$  を用いようが, 需要関数は同じであることを確認しよう.

1. 効用関数として  $\tilde{U}$  を用い, 大問 1 と同じやり方で需要関数を導出せよ.

直接的に需要関数を計算せずとも, 答えが一致することは以下のようにして示すことができる.

2.  $U$  と  $\tilde{U}$  の間には, 以下の関係が成り立つことを確認せよ.

$$\tilde{U}(c_1, c_2) = \ln U(c_1, c_2).$$

3.  $U$  と  $\tilde{U}$  の間には, 以下の関係が成り立つことを確認せよ: ある  $(c_1, c_2)$  と  $(c'_1, c'_2)$  について,

$$U(c_1, c_2) \geq U(c'_1, c'_2) \text{ であれば必ず } \tilde{U}(c_1, c_2) \geq \tilde{U}(c'_1, c'_2)$$

し,

$$\tilde{U}(c_1, c_2) \geq \tilde{U}(c'_1, c'_2) \text{ であれば必ず } U(c_1, c_2) \geq U(c'_1, c'_2)$$

である. (あるいは単に  $U(c_1, c_2) \geq U(c'_1, c'_2) \Leftrightarrow \tilde{U}(c_1, c_2) \geq \tilde{U}(c'_1, c'_2)$  と書く.)

4. 3 の性質から,  $U$  を最大化することと  $\tilde{U}$  を最大化することとは同じであることを説明せよ,

## 4 限界代替率と相対価格

効用関数を  $U(c_1, c_2)$  とする。消費の組  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$  における、財 2 の財 1 に対する(あるいは財 2 の財 1 で測った)限界代替率とは、

$$\frac{\partial U(\bar{c}_1, \bar{c}_2)}{\partial c_1} \bigg/ \frac{\partial U(\bar{c}_1, \bar{c}_2)}{\partial c_2}$$

で与えられる。ただし、 $i = 1, 2$  について、 $\frac{\partial U(\bar{c}_1, \bar{c}_2)}{\partial c_i}$  は、関数  $U$  を  $c_i$  で偏微分し、点  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$  において評価した値である。

1. 問 3 の効用関数を用いたとき、 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$  における財 2 の財 1 に対する限界代替率はどのように表現されるか。
2.  $i = 1, 2$  について、 $\bar{c}_i = x_i(p_1, p_2, I)$  となっているとき、前問の限界代替率が相対価格  $p_1/p_2$  に等しくなることを示せ。
3. 横軸に  $c_1$ 、縦軸に  $c_2$  をとって図示したとき、限界代替率は無差別曲線(の接線)の傾きの絶対値に等しい。このことを用いて、前問の結果が、「最適な消費の組において、無差別曲線は予算線と接する」ことを意味することを説明せよ。
4. 「限界代替率は無差別曲線(の接線)の傾きの絶対値に等しい」ことはどのようにすれば示せるか、考えてみよ。

## 5 消費・貯蓄モデル

標準的な消費・貯蓄モデルにおいては、2 財モデルにおいて  $c_1$  を現在の消費財の消費量、 $c_2$  を将来の消費財の消費量と読み替える。

このモデルにおいては、現在の所得のうち、現在の消費財の購入に充てられなかった部分が貯蓄に充てられ、貯蓄は将来の消費財の購入に充てられる。つまり、現在の予算制約が

$$p_1 c_1 + \tilde{s} \leq \tilde{y}_1$$

という形で与えられ、将来の予算制約が

$$p_2 c_2 \leq (1 + R_2) \tilde{s}$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{y}_1$  は例えば貨幣単位で測った現在の所得であり、 $p_1$  は現在の消費財価格、 $\tilde{s}$  は貨幣単位で測った貯蓄である。貨幣単位で測った貯蓄は、現在から将来にかけて

(名目)金利  $R_2$  だけ成長し, 将来の消費財購入(価格は  $p_2$ )に充てられる. この段階では将来の所得はゼロとしているが, 将来所得があるケースも扱われる.

1. 2本の予算制約式をまとめると,

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1 + R_2} \leq \tilde{y}_1,$$

と書けることを示せ.

2. 実質金利を  $r_2$  と書こう. その定義は

$$1 + r_2 = \frac{1 + R_2}{p_2/p_1}$$

で与えられる. ここで現在の所得を現在の消費財単位で測った実質所得を  $y_1 = \tilde{y}_1/p_1$  と書くことにしよう. このとき

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r_2} \leq y_1,$$

と書けることを示せ.

3. 貯蓄を現在の消費財単位で測った実質所得を  $s = \tilde{s}/p_1$  と書くと, 元々の2本の予算制約式は

$$\begin{aligned} c_1 + s &\leq y_1 \\ c_2 &\leq (1 + r_2)s \end{aligned}$$

と書けることを示せ.

多くの場合, 貨幣単位で測った予算制約ではなく, 問題2や3で扱った実質版の予算制約からスタートするのだが, 意味するところは同じである.

さて, 基本の消費・貯蓄モデルでは, 各時点の消費からの効用の割引現在価値をもって効用とするのが標準的である. つまり, 正の定数  $\beta < 1$  があって

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

のような形をとるとする. 言い換えれば, 各時点の消費量  $c_t$  に応じて, その時点における満足度を点数化( $u(c_t)$  が点数)し, 各時点の点数にウェイトをつけて足し合わせた合計点をもって  $(c_1, c_2)$  の評価値とするのである.  $\beta < 1$  であることから, 将来の点数は割り引かれてい

ることになり,  $\beta$  のことを割引因子(discount factor)と呼ぶ.<sup>1</sup> よく用いられる例として,

$$\ln c_1 + \beta \ln c_2$$

がある.<sup>2</sup>以下ではこれを用いて計算を行うことにしよう.

4. 最適な消費の組について, 限界代替率と価格比が一致することから

$$1 = \beta \frac{c_1}{c_2} (1 + r_2)$$

が成立することを説明せよ.

この式をオイラー方程式という. より一般的には,  $U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$  であるとき,

$$1 = \beta \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} (1 + r_2)$$

という形をとる.

5. 効用関数を  $U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$  とし, 問題3の2本の制約式(等号で成立するとしてよい)のもとで最大化しよう. ラグランジュの未定乗数法を用いて上のオイラー方程式を導出せよ.

---

<sup>1</sup> $\beta = 1/(1 + \rho)$  と書いて,  $\rho$  のことを(主観的)割引率とも呼ぶ.

<sup>2</sup>他には

$$\sqrt{c_1} + \beta \sqrt{c_2}$$

などが挙げられる.